23-3-17

• Διανυσματικά πεδία κατά μήκος της $c: I\subset\mathbb{R}\to S$, δηλαδή λείες απεικονίσεις $V: I\to\mathbb{R}^3$, $\forall\, t\in I$. $V(t)\in T_{c(t)}S$

$V, W \longmapsto V+W\,,\ fV$ με $f: I\to\mathbb{R}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to S$ καμπύλη της S και V διαν. πεδίο κατά μήκος της c. Καλούμε συναλλοίωτο παράγωγο του V κατά μήκος της c το διαν. πεδίο το
$$\frac{DV}{dt}(t)=\left(\frac{dV}{dt}(t)\right)^T=\frac{dV}{dt}(t)-\left\langle \frac{dV}{dt}(t), N(c(t))\right\rangle N(c(t))$$
$N: S\to S^2$ απεικ. Gauss

<u>Ιδιότητες</u>: i) $\dfrac{D(V+W)}{dt}=\dfrac{DV}{dt}+\dfrac{DW}{dt}$

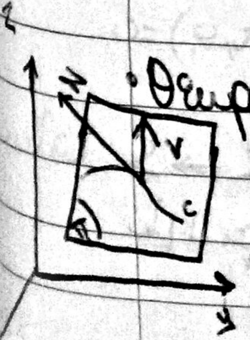
ii) $\dfrac{D(fV)}{dt}=\left(\dfrac{df}{dt}V+f\dfrac{dV}{dt}\right)^T=\dfrac{df}{dt}V+f\dfrac{DV}{dt}$

iii) $\dfrac{d}{dt}\langle V,W\rangle=\left\langle\dfrac{DV}{dt},W\right\rangle+\left\langle V,\dfrac{DW}{dt}\right\rangle$

<u>Απόδειξη</u>

iii) $\dfrac{d}{dt}\langle V,W\rangle=\left\langle\dfrac{dV}{dt},W\right\rangle+\left\langle V,\dfrac{dW}{dt}\right\rangle=$

$$=\left\langle\frac{DV}{dt}+\left\langle\frac{dV}{dt},N\right\rangle N\,,\,W\right\rangle+\left\langle V,\frac{DW}{dt}+\left\langle\frac{dW}{dt},N\right\rangle N\right\rangle$$



• Θεωρούμε $S=\Pi: Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

$c: I\subset\mathbb{R}\to\Pi$ και V διαν. πεδίο κατά μήκος της c
$$\frac{DV}{dt}=\left(\frac{dV}{dt}\right)^T=\frac{dV}{dt}-\left\langle\frac{dV}{dt},N\circ c\right\rangle N\circ c$$

$V = (V_1, V_2, V_3)$, $\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV_1}{dt}, \frac{dV_2}{dt}, \frac{dV_3}{dt}\right)$

$N = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$, $\langle V, N \rangle = 0$

Άρα, $\boxed{\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt}}$

<u>Παρατήρηση</u>: Το V είναι παράλληλο κατά μήκος της c $\Leftrightarrow \frac{DV}{dt} = 0$.

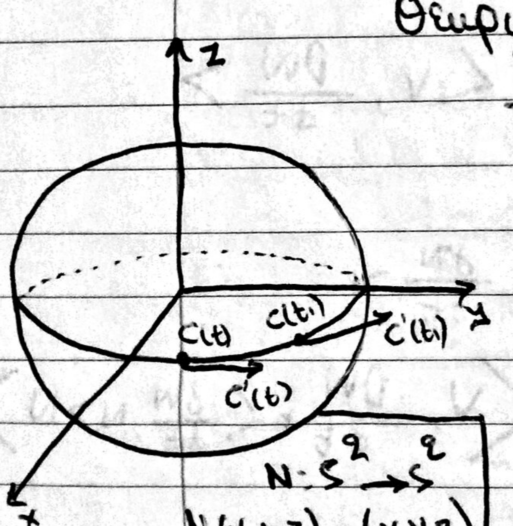
<u>Ορισμός</u>: Έστω διαν. πεδίο V κατά μήκος της $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ καλείται παράλληλο $\Leftrightarrow \frac{DV}{dt} = 0$

<u>Πχ (SOS)</u>

$S = S^2$ (μοναδιαία) και $c: \mathbb{R} \to S^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. ό μέγιστος κύκλος

Θεωρώ το διαν. πεδίο V, με $V(t) = c'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το $V = c'$ είναι παράλληλο στην S^2



$N: S^2 \to S^2$

$N(x,y,z) = (x,y,z)$

$\frac{DV}{dt}(t) = \left(\frac{dV}{dt}(t)\right)^T = \frac{dV}{dt}(t) - \langle \frac{dV}{dt}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t))$

$= \frac{dc'}{dt}(t) - \langle \frac{dc'}{dt}(t), c(t) \rangle c(t) =$

$= (-\cos t, -\sin t, 0) - \langle (-\cos t, -\sin t, 0), (\cos t, \sin t, 0) \rangle \cdot (\cos t, \sin t, 0)$

$= -(\cos t, \sin t, 0) + (\cos t, \sin t, 0) = 0$

<u>Ορισμός</u>: Μια κανονική καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to S$, καλείται γεωδαισιακή της S <u>ανν</u> το c' είναι παράλληλο ή ισοδύναμα $\frac{Dc'}{dt} = 0$.

Π.χ

$S = \Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$. Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \Pi$, με
$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $c'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$
και $\frac{Dc'}{dt}(t) = c''(t)$.

c' παράλληλο $\Leftrightarrow \frac{Dc'}{dt} = 0 \Leftrightarrow c'' = 0 \Leftrightarrow c(t) = tv + p_0$.

Δηλαδή, γεωδαισιακές του επιπέδου είναι ευθείες.

Παρατήρηση: Έστω v, w παράλληλα διαν. πεδία κατά μήκος της $c: I \subset \mathbb{R} \to S$. Τότε:

i) $\langle v, w \rangle =$ σταθ

ii) $\|v\| =$ σταθ, $\|w\| =$ σταθ.

iii) $\measuredangle(v, w) =$ σταθ.

Απόδειξη

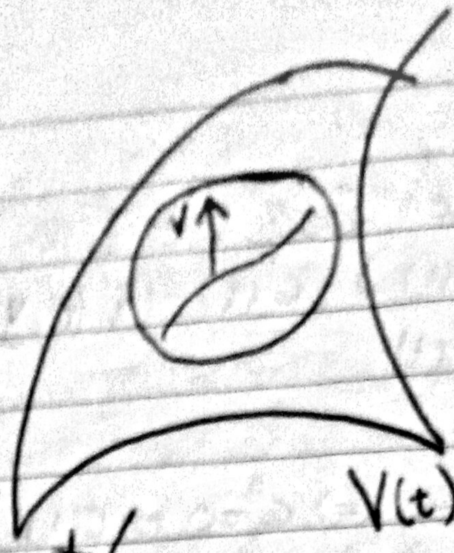
i) $\frac{d}{dt}\langle v, w \rangle = \langle \frac{Dv}{dt}, w \rangle + \langle v, \frac{Dw}{dt} \rangle = 0$, αφού v, w παράλληλα.

Παρατήρηση: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ γεωδαισιακή της S, τότε $\|c'(t)\| =$ σταθ. $\forall t$

Π.χ

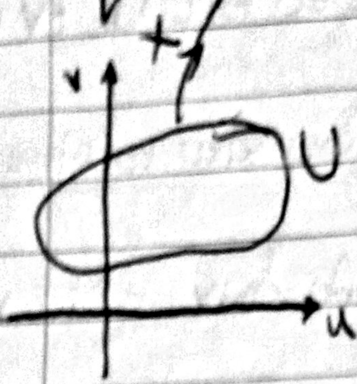
- $c(t) = t^3 v + p_0$, $c'(t) = 3t^2 v$, δηλαδή $\|c'(t)\| \neq$ σταθ.
Άρα όχι γεωδαισιακή, παρ' όλο που η εικόνα είναι ευθεία.

- $c(t) = (t^3 + t)v + p_0$, $c'(t) = (3t^2 + 1)v$
Ούτε εδώ γεωδαισιακή.



$X: U \to S$, σύστημα συντεταγμένων
$c: I \subset \mathbb{R} \to X(U)$. Έστω V
διαν. πεδίο κατά μήκος της c
$c(t) = X(u(t), v(t))$

$$V(t) = a(t) X_u(u(t), v(t)) + b(t) X_v$$



$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^T =$$

$$= \left(a' X_u + b' X_v + a \frac{d}{dt} X_u(u(t), v(t)) + b \frac{d}{dt} X_v(u(t), v(t))\right)^T =$$

$$= \left(a' X_u + b' X_v + a\left[u' X_{uu} + v' X_{uv}\right] + b\left[u' X_{vu} + v' X_{vv}\right]\right)^T =$$

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$$

$$= \left(a' + a u' \Gamma_{11}^1 + a v' \Gamma_{12}^1 + b u' \Gamma_{12}^1 + b v' \Gamma_{22}^1\right) X_u +$$

$$+ \left(b' + a u' \Gamma_{11}^2 + a v' \Gamma_{12}^2 + b u' \Gamma_{12}^2 + b v' \Gamma_{22}^2\right) X_v$$

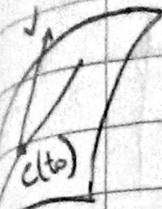
Άρα:

<u>Πρόταση</u>: Το V είναι παράλληλο $\iff$

$$\begin{cases} a' + a u' \Gamma_{11}^1 + a v' \Gamma_{12}^1 + b u' \Gamma_{12}^1 + b v' \Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + a u' \Gamma_{11}^2 + a v' \Gamma_{12}^2 + b u' \Gamma_{12}^2 + b v' \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

(Γραμμικό Ομογενές σύστημα 1ης τάξης)

Συμπέρασμα: Έστω $c: I \to S$ και $v \in T_{c(t_0)} S$ τότε υπάρχει μοναδικό παράλληλο διαν. πεδίο $V(t), t \in I$, ώστε $V(t_0) = v$



Πότε η c είναι γεωδαισιακή;

$$c'(t) = u' X_u + v' X_v$$

$$\frac{Dc'}{dt} = \left(u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1\right) X_u + \left(v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2\right) X_v.$$

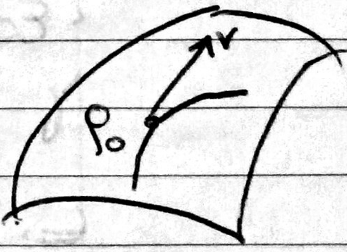
Πρόταση: Η καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γεωδαισιακή $\iff$

Μη-γραμμικό 2ης τάξης

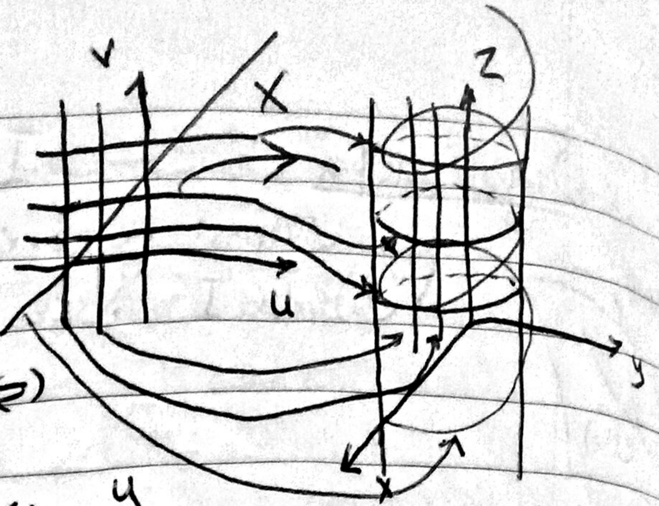
$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1(u,v) + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

Πρόταση: $\forall p_0 \in S$ και $v \in T_{p_0} S$ υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, ώστε $c(0) = p_0$ με $c'(0) = v$.

Δηλαδή από κάθε σημείο περνάνε άπειρες γεωδαισιακές.



Πόρισμα: Αν $\Phi: S \to \tilde{S}$ τοπική ισομετρία και $c: (-\varepsilon, \varepsilon)$ γεωδαισιακή τη S, τότε $\Phi \circ c$ είναι γεωδαισιακή της $\tilde{S}$.



Πχ
$S: x^2+y^2=R^2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=R\cos\frac{u}{R},\ y=R\sin\frac{u}{R}$

Έτσι $S \ni (x,y,z)=\left(R\cos\frac{u}{R}, R\sin\frac{u}{R}, v\right)=X(u,v)$

$X_u=\left(-\sin\frac{u}{R}, \cos\frac{u}{R}, 0\right),\ X_v=(0,0,1)$

$E=|X_u|^2=1,\ F=0,\ G=|X_v|^2=1. \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi: \mathbb{R}^2 \to S$ είναι τοπική ισομετρία

- Αν $c(t)$ γεωδαισιακή $\Rightarrow \|c(t)\|=$ σταθ $=a$.

Έστω $\gamma(t)$ γεωδ. της S και $\|\gamma'(t)\|=a_0$

Μήκος τόξου: $s=\int_{t_0}^{t}\|\gamma'(u)\|du=\int_{t_0}^{t}a_0\,du \Rightarrow s=a_0(t-t_0)$

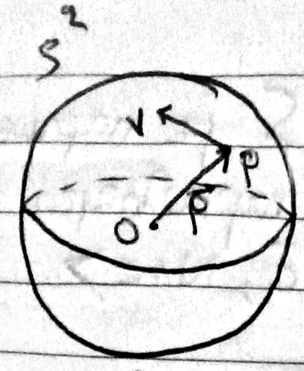
- Έστω $\gamma(s)$ καμπύλη της S με παράμετρο το μήκος τόξου

γ γεωδ $\Leftrightarrow \frac{D\dot\gamma}{ds}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{d\dot\gamma}{ds}\right)^T=0 \Leftrightarrow (\ddot\gamma)^T=0$

$\Leftrightarrow \ddot\gamma-\langle\ddot\gamma, N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma=0$

Δηλαδή γ γεωδαισιακή $\Leftrightarrow \ddot\gamma(s) \parallel N(\gamma(s)),\ \forall s.$

•



$p\in S^2,\ v\in T_pS$

$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S^2,\ \gamma(0)=p,\ \gamma'(0)=v.$

$$\gamma(t)=\cos(t\|v\|)\,p+\sin(t\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$$

είναι η μοναδική γεωδ. που είναι και μέγιστος κύκλος

•

Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to S$ καμπύλη και V διαν. πεδίο κατά μήκος της c μοναδιαίο, δηλ. $\|V(t)\|=1,\ \forall t\in I$ (*)

$$\frac{DV}{dt}=\left(\frac{dV}{dt}\right)^T=\frac{dV}{dt}-\langle\frac{dV}{dt},N\circ c\rangle N\circ c.$$

$$(*)\Rightarrow\langle V,V\rangle=1\Rightarrow\frac{d}{dt}\langle V,V\rangle=0\Rightarrow 2\langle\frac{DV}{dt},V\rangle=0$$

Δηλαδή, $\frac{DV}{dt}\perp N,\ \frac{DV}{dt}\perp V\Rightarrow\frac{DV}{dt}\parallel N\times V\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{DV}{dt}=\lambda\cdot N\times V\Rightarrow\lambda\|N\times V\|^2=\langle\frac{DV}{dt},N\times V\rangle\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\langle\frac{DV}{dt},N\times V\rangle\Rightarrow\boxed{\lambda=\langle\frac{dV}{dt},N\times V\rangle}$$

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\left[\frac{DV}{dt}\right]=\lambda=\langle\frac{dV}{dt},N\times V\rangle$ καλείται αλγεβρική τιμή της συναλλοιώτου παραγώγου του μοναδιαίου V

• $\frac{DV}{dt}=\left[\frac{DV}{dt}\right]N\times V$

Ορισμός: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Καλούμε γεωδαισιακή καμπυλότητα της c την συνάρτηση $K_g = \left[\frac{Dc'}{ds}\right] = \langle \ddot{c}, N \times \dot{c} \rangle$

• V παράλληλο $\Leftrightarrow \left[\frac{DV}{dt}\right] = 0$.

Συμπέρασμα: Η καμπύλη $c: I \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου είναι γεωδαισιακή $\Leftrightarrow K_g = 0$.